SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS JUNIO 2011 (COMÚN MODELO)

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcule $A^2 - B.C^t$.

b) (1'5 puntos) Resuelva la ecuación matricial A.X + B = 2.C .

Solución

Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, la matriz traspuesta de C es $C^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

(a)

$$A^2 - B.C^t = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 7 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

(b)

Resuelva la ecuación matricial A.X + B = 2.C.

De A.X + B = 2.C tenemos A.X = 2.C - B.

Si A tiene inversa podríamos multiplicar por la izquierda la expresión entera por A^{-1} y nos quedaría:
$A^{-1}.A.X = A^{-1}(2.C - B)$, es decir $X = A^{-1}(2.C - B)$.

A tiene inversa si mediante transformaciones elementales por filas de Gauss podemos llegar de $(A|I_2)$, a la expresión $(I_2|B)$, donde $B = A^{-1}$.

$(I_2|A)$ =

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} F_1-F_2 \\ \\ \end{array} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F_2-F_1 \end{array} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} F_1-2F_2 \\ \\ \end{array} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -1F_2 \end{array} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

La matriz inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

También se puede calcular la inversa por determinantes.

A tiene inversa si su determinante |A| es distinto de 0, y la inversa es $A^{-1} = \frac{1}{|A|}.Adj(A^t)$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2.(-3) - (-5)(1) = -1$, luego existe $A^{-1} = \frac{1}{|A|}.Adj(A^t)$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$; $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$X = A^{-1}(2.C - B) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} . \left(2.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -2 & 9 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -30 & -13 \\ 3 & -13 & -6 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2

a) (1 punto) Calcule la función derivada de $f(x) = \frac{e^{-2x}}{(-x^2+2)^2}$

b) (1'5 puntos) Se sabe que la expresión que representa el número medio de clientes N(t) que acude un día a una cadena de almacenes, en función del número de horas *t* que llevan abiertos, es $N(t) = at^2+bt$, $0 \le t \le 8$, $a, b \in R$.

Sabiendo que el máximo de clientes que han acudido ese día ha sido de 160 y que se ha producido a las 4 horas de abrir, calcule a y b.

Solución

Recordamos algunas derivadas y reglas de derivación. También algo sobre extremos absolutos

$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$; $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$; $((f(x)^k)' = k.f(x)^{k-1}.f'(x)$;

$(e^{kx})' = k.e^{kx}$.; $(x^k)' = k.x^{k-1}$; $(k)' = 0$.

Sabemos que los extremos absolutos de una función N(t) se encuentran entre las soluciones de N(t)' = 0, y en los extremos del intervalo (en este caso 0 y 8). También en los números donde no es continua o derivable, que no es nuestro caso por ser un trozo d una función polinómica

a)

$f(x) = \frac{e^{-2x}}{(-x^2+2)^2}$; $f'(x) = \frac{-2.e^{-2x}.(-x^2+1)^2 - e^{-2x}.2.(-x^2+1).(-2x)}{((-x^2+1)^2)^2} = \frac{-2.e^{3x}.\left(x^4+2x^3-2x^2-2x+1\right)}{(-x^2+1)^4}$.

$-2(-x^2+1)^2 – 2.(-x^2+1)(-2x) = -2(x^4-2x^2+1) -2.(2x^3-2x) = -2(x^4 + 2x^3 - 2x^2 -2x +1)$

EJERCICIO 3

En una primera bolsa se han colocado 4 bolas blancas y 3 negras, y en una segunda bolsa 3 blancas y 5 negras. Se saca una bola de la primera y, sin verla, se introduce en la segunda. A continuación se saca una bola de la segunda. Halle la probabilidad de que:
a) (1'25 puntos) La bola extraída de la segunda bolsa sea negra.
b) (1'25 puntos) La bola extraída de la primera bolsa sea negra, si sabemos que la bola extraída de la segunda ha sido blanca.

Solución

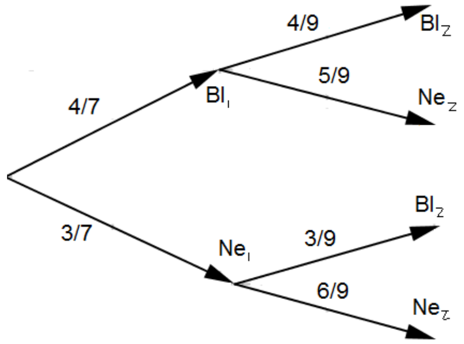
Antes de extraer las bolas la composición de las bolsas es:
1ª bolsa 4 bolas blancas y 3 negras y 2ª bolsa 3 blancas y 5 negras

Llamemos Bl_1 y Ne_1 a los sucesos "sacar blanca de la 1ª bolsa", "sacar negra de la 1ª bolsa".
Evidentemente $p(Bl_1) = 4/7$ y $p(Ne_1) = 3/7$ (número de casos favorables partido número de casos posibles).

Si *saco una bola blanca* de la 1ª bolsa y la introduzco en la 2ª bolsa la composición de la 2ª bolsa es 4 blancas y 5 negras, llamando Bl_2 y Ne_2 a los sucesos "sacar blanca de la 2ª bolsa", "sacar negra de la 2ª bolsa", tenemos las siguientes probabilidades $p(Bl_2 / Bl_1) = 4/9$ y $p(Ne_2 / Bl_1) = 5/9$ (número de casos favorables partido número de casos posibles).

Si *saco una bola negra* de la 1ª bolsa y la introduzco en la 2ª bolsa la composición de la 2ª bolsa es 3 blancas y 6 negras, llamando Bl_2 y Ne_2 a los sucesos "sacar blanca de la 2ª bolsa", "sacar negra de la 2ª bolsa", tenemos las siguientes probabilidades $p(Bl_2 / Ne_1) = 3/9$ y $p(Ne_2 / Ne_1) = 6/9$ (número de casos favorables partido número de casos posibles).

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol.



(a)
Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que la bola extraída de la segunda bolsa sea negra es:

$$p(Ne_2) = p(Bl_1).p(Ne_2/ Bl_1) + p(Ne_1).p(Ne_2/Ne_1) = (4/7)(5/9) + (3/7)(6/9) = 38/63 \cong 0'603.$$

(b)
Teniendo en cuenta el apartado (a) y la probabilidad del suceso contrario tenemos:
$p(Bl_2) = 1 - p(Ne_2) = 1 – 38/63 = 25/63 \cong 0'397$

Aplicando el teorema de Bayes, la probabilidad de que la bola extraída de la primera bolsa sea negra, si sabemos que la bola extraída de la segunda ha sido blanca es:

$$p(Ne_1/Bl_2) = \frac{p\left(Ne_1 \cap Bl_2\right)}{p(Bl_2)} = \frac{p\left(Ne_1\right).p(Bl_2/Ne_1)}{p(Bl_2)} = \frac{(3/7)(3/9)}{(25/63)} = 9/25 = 0'36$$

EJERCICIO 4

Una máquina está preparada para fabricar piezas de, a lo sumo, 10 cm de longitud.
Se toma una muestra de 1000 piezas, comprobándose que la media sus longitudes es de 10'0037 cm. La longitud de las piezas fabricadas por esa máquina sigue una ley Normal con desviación típica 0'2 cm.
a) (0.5 puntos) Plantee un contraste de hipótesis unilateral para comprobar si con los datos de esa muestra es posible afirmar que la media de la longitud de las piezas fabricadas por la máquina es de más de 10 cm.
b) (1 punto) Determine la región de aceptación de la hipótesis nula de ese contraste para un nivel de significación α = 0'025.
c) (1 punto) Con los datos de la muestra y usando el contraste de hipótesis del primer apartado, ¿qué conclusión se obtendría sobre la longitud media de las piezas fabricadas?

Solución

(a) , (b) y (c)

Como me dicen que la máquina está preparada para fabricar piezas de, a lo sumo, 10 cm de longitud, y que plantee un contraste de hipótesis unilateral para ver si es posible afirmar que la media de la longitud de las piezas fabricadas por la máquina es de más de 10 cm, tenemos por tanto que la hipótesis nula que se desea contrastar es $H_0 : \mu \geq 10$, frente a la hipótesis alternativa de este contraste que sería $H_1 : \mu < 10$, que se opone a hipótesis nula H_0, y me indica la dirección de la región crítica.

El *estadístico de prueba* de este contraste es $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una ley normal N(0,1).

En nuestro caso: $\overline{X}$ = 10'0037 cm; μ_0 = 10 cm; desviación típica σ = 0'2 cm; n=1000.

Calculo de la región crítica para el nivel de significación α = 0'025

El valor critico correspondientees $z_\alpha = - z_{1-\alpha}$

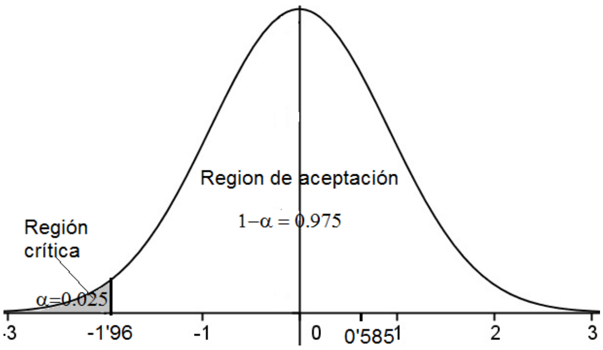
Sabemos que $p(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 - 0'025 = 0'975$, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha}$. Vemos en la tabla de la N(0,1) que el valor 0'975 aparece en la tabla, y que corresponde a $z_{1-\alpha}$= 1'96. Por tanto $z_\alpha = - z_{1-\alpha} = - z_{0'975} \cong -1'96$.

Entonces *la región crítica* está formada por los números reales situados a la izquierda de los números -1'96.

Cálculo del valor observado del estadístico de contraste:

$$z_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{10'0037-10}{0'2/\sqrt{1000}} \cong 0'585$$

Resultado del contraste:



Como el valor observado 0'585 está a la derecha de -1'96, porque -1'96 < 0'585, se encuentra en la región de aceptación correspondiente al nivel 0'025, por lo cual ***aceptamos la hipótesis nula*** $H_0 : \mu \geq 10$ a este nivel.

En consecuencia, no se puede afirmar, al nivel 0'025, que los datos la creencia de que las piezas midan menos de 10 cm o más.

OPCION B

EJERCICIO 1

Sea el recinto determinado por las siguientes inecuaciones:

$$x + y \le 20, \quad 3x + 5y \le 70, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0.$$

a) (0.5 puntos) Razone si el punto de coordenadas (4'1,11'7) pertenece al recinto.
b) (1.25 puntos) Represente dicho recinto y calcule sus vértices.
c) (0.75 puntos) ¿Dónde alcanzará la función *F(x,y) = 0'6x + y* sus valores extremos y cuáles serán éstos?

Solución

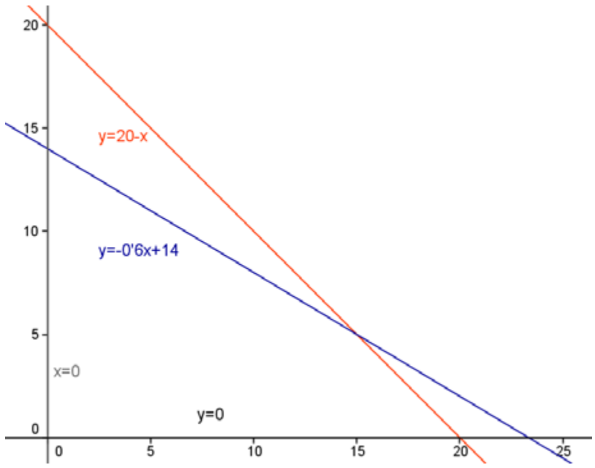
(a)
Razone si el punto de coordenadas (4'1,11'7) pertenece al recinto. Tenemos que ver si verifica todas las desigualdades.
Las dos últimas las verifica $x \ge 0$ e $y \ge 0$. Veamos las otras:
$x + y \le 20$, en nuestro caso $4'1 + 11'7 \le 20$, es decir $15'8 \le 20$ lo cual es cierto.
$3x + 5y \le 70$, en nuestro caso $3(4'1) + 5(11'7) \le 70$, es decir $70'8 \le 70$ lo cual es falso. Por tanto el punto (4'1,11'7) *no pertenece al recinto*.
(b)
Las desigualdades $x + y \le 20$, $3x + 5y \le 70$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, las transformamos las desigualdades en igualdades, y ya son rectas,

$$x+y = 20; \;\; 3x +5y = 70 \; ; \; y = 0; \; x = 0,$$

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente) despejamos las "y" y tenemos

$$y = 20 - x; \;\; y = -(3/5)x + 70/5 = -0'6x + 14 \; ; \; y = 0; \; x = 0,$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, entre las que estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.

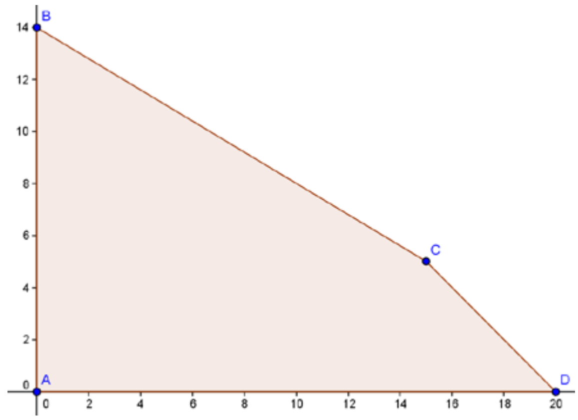


Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De y=0 e y=20-x, Tenemos 0 = 20-x, de donde "x = 20" e "y = 0", y el punto de corte es D(20,0)
De y=0 y x=0, obtenemos el punto A(0,0)
De y=20-x e y= -0'6x+14, Tenemos 20-x= -0'6x+14, de donde 6 = 0'4x, luego "x = 6/0'4 = 15" e "y = 5" , y el punto de corte es C(15,5)
De y=20-x y x=0, Tenemos y = 20, y el punto de corte es E(0,20)
De y=-0'6x+14 y x=0, Tenemos y = 14, y el punto de corte es B(0,14)
Fijándonos de nuevo en las desigualdades de las inecuaciones los vértices son sólo

A(0,0); B(0,14); C(15,5) y el D(20,0).

El recinto es:



(c)
Consideremos la función F(x,y) = 0’6x + y.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que la función F alcanza máximo (y mínimo) absoluto en la región acotada, y que este extremo debe estar situado en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,0); B(0,14); C(15,5) y el D(20,0):

F(0,0)=0’6.0+0=0, F(0,14)= 0’6.0+14=14, F(15,5) = 0’6.15+5=14, F(20,0)= 0’6.20+0=12.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que el máximo absoluto de la función F en la región es 14 (el valor mayor en los vértices) y se alcanza en los puntos (0,14) y (15,5), por tanto todo el segmento BC es donde se alcanza el máximo.
El mínimo es 0 y se alcanza en el punto (0,0)

EJERCICIO 2

Las funciones $I(t) = -2t^2 + 51t$ y $G(t) = t^2 - 3t + 96$ con $0 \le t \le 18$ representan, respectivamente, los ingresos y gastos de una empresa, en miles de euros, en función de los años, t, transcurridos desde su inicio y en los últimos 18 años.
a) (0’5 puntos) ¿Para qué valores de t, desde su entrada en funcionamiento, los ingresos coincidieron con los gastos?
b) (1 punto) Determine la función que refleje los beneficios (ingresos menos gastos) en función de t y represéntela gráficamente.
c) (1 punto) ¿Al cabo de cuántos años, desde su entrada en funcionamiento, los beneficios fueran máximos? Calcule el valor de ese beneficio.

Solución

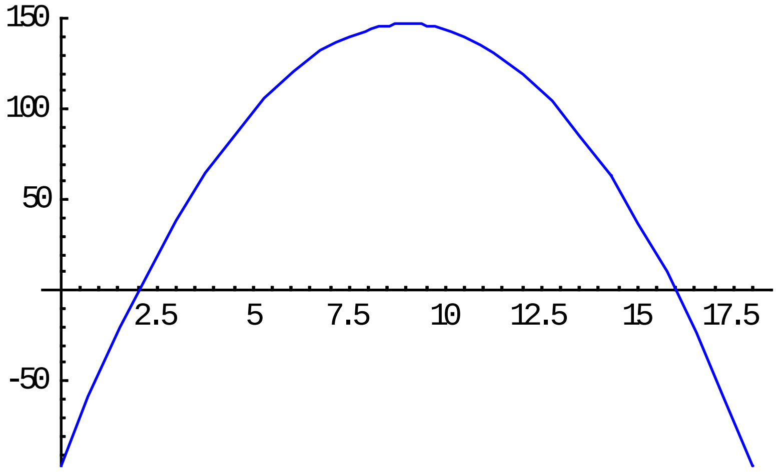
(a)
$I(t) = -2t^2 + 51t$ y $G(t) = t^2 - 3t + 96$ con $0 \le t \le 18$
Lo que nos piden es que resolvamos la ecuación I(t) = G(t) en el intervalo [0,18].
De $-2t^2 + 51t = t^2 - 3t + 96$, tenemos $0 = 3t^2 - 54t + 96$ ($at^2 + bt + c = 0$)

Resolvemos $3t^2 - 54t + 96 = 0$; $t = \frac{-(-54)\pm\sqrt{(-54)^2-4(3)(96)}}{2(3)} = \frac{54\pm\sqrt{1764}}{2} = \frac{54\pm42}{2}$, donde tenemos dos soluciones $t_1 = (54+42)/2 = 48$ y $t_2 = (54-42)/2 = 6$. La solución válida es t = 6.
(b)
Beneficios = $B(t) = I(t) – G(t) = -2t^2 + 51t – (t^2 - 3t + 96) = -3t^2 + 54t – 96$.

Nos piden dibujar la parábola $B(t) = -3t^2 + 54t – 96$ (a = -3, b = 54, c = -96) entre 0 y 18.

Como a = -3 < 0, las parábola tiene las ramas hacia abajo (∩)´
Su vértice tiene la abscisa en t = -b/2a = -54/-6 = 9, que sabemos es un máximo.
El vértice es V(9,B(9)) = V(9,147).
$B(9) = -3(9)^2 + 54(9) – 96 = 147$
Para t = 0, B(0) = -96.
Para t = 18, $B(18) = -3(18)^2 + 54(18) – 96 = -96$.

La gráfica de la parábola es:



(c) ¿Al cabo de cuántos años, desde su entrada en funcionamiento, los beneficios fueran máximos? Calcule el valor de ese beneficio.

Sabemos que los extremos absolutos se encuentran entre los valores que anulan la primera derivada, y lo extremos del intervalo t = 0 y t = 18

De $B(t) = -3t^2 + 54t - 96$, tenemos $B'(t) = -6t + 54$. Resolviendo $-6t + 54. = 0$, tenemos $t = 54/6 = 9$.

Como B(9) = 147; B(0) = -96; B(18) = -96, resulta que los beneficios fueron máximos al cabo de 9 años y fueron de 147000 euros (el problema lo han dado en miles de euros).

EJERCICIO 3
Un libro tiene cuatro capítulos. El primer capítulo tiene 140 páginas, el segundo 100, el tercero 150 y el cuarto 50. El 5% de las páginas del primer capítulo, el 4% del segundo y el 2% del tercera tienen algún error. Las páginas del cuarto capítulo no tienen errores.
a) (1'25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que, al elegir una página al azar, tenga algún error?
b) (1'25 puntos) Supongamos que elegimos una página al azar y observamos que no tiene ningún error, ¿cuál es la probabilidad de que sea del segundo capítulo?

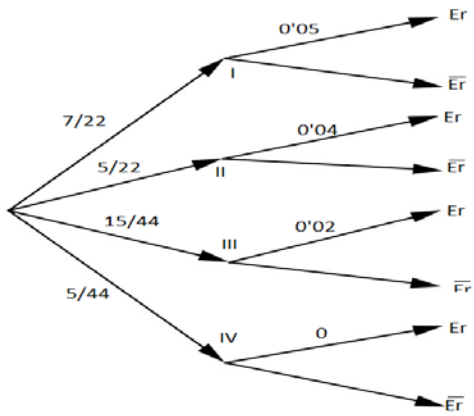
Solución

Llamemos I,II,III,IV y Er, a los sucesos "páginas del capítulo I, II, III, IV, "páginas del capítulo con error".
Pondremos indistintamente Er^C o $\overline{Er}$, y recordaremos que $p(Er^C) = 1 - p(Er)$ y que $p(Er^C/II) = 1 - p(Er/II)$
Número de páginas del libro = 140+100+150+50 = 440

Como el primer capítulo tiene 140 páginas tenemos p(I) = 140/440 = 7/22.
Como el segundo capítulo tiene 100 páginas tenemos p(II) = 100/440 = 5/22.
Como el tercer capítulo tiene 150 páginas tenemos p(III) = 150/440 = 15/44.
Como el primer capítulo tiene 50 páginas tenemos p(IV) = 50/440 = 5/44.

Como el 5% de las páginas del primer capítulo tienen algún error, p(Er/I) = 5% = 0'05.
Como el 4% de las páginas del segundo capítulo tienen algún error, p(Er/II) = 4% = 0'04.
Como el 4% de las páginas del segundo capítulo tienen algún error, p(Er/III) = 2% = 0'02.
Como las páginas del cuarto capítulo no tienen errores, p(Er/IV) = 0% = 0.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol. Recordamos que las sumas de las ramas de cada nodo en un diagrama de árbol suman 1.



(a)
¿Cuál es la probabilidad de que, al elegir una página al azar, tenga algún error?
Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que llegue tarde a clase (R) es:

$$p(Er) = p(I).p(Er/I) + p(II).p(Er/II) + p(III).p(Er/III) + p(IV).p(Er/IV) =$$
$$= (7/22).0'05 + (5/22).0'04 + (15/44).0'02 + (5/44).0 = 7/220 \approx 0'0318.$$

b)
Supongamos que elegimos una página al azar y observamos que no tiene ningún error, ¿cuál es la probabilidad de que sea del segundo capítulo?
Aplicando el teorema de Bayes, la probabilidad de pedida es:

$$P(II/Er^C) = \frac{p\left(II \cap Er^C\right)}{p(Er^C)} = \frac{p\left(II).p(Er^C/II\right)}{p(Er^C)} = \frac{(5/22)(1\text{-}0'04)}{1\text{-}0'0318} \approx 0'2253 = 22'53\%$$

EJERCICIO 4
a) (1 punto) Una población de tamaño 1000 se ha dividido en 4 estratos de tamaño 150, 400, 250 y 200. Utilizando muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional se han seleccionado 10 individuos del tercer estrato, ¿cuál es el tamaño de la muestra?
b) (1.5 puntos) El peso de los individuos de una población se distribuye según una ley Normal de desviación típica 6 kg. Calcule el tamaño mínimo de la muestra para estimar, con un nivel de confianza del 95%, el peso medio en la población con un error no superior a 1 kg.

Solución

(a)
Una población de tamaño 1000 se ha dividido en 4 estratos de tamaño 150, 400, 250 y 200. Utilizando muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional se han seleccionado 10 individuos del tercer estrato, ¿cuál es el tamaño de la muestra?

Sabemos que en un muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, si hay "k" estratos y que el número de elementos de cada estrato es N_1, N_2, ..., N_k, y si n_1, n_2, ..., n_k son los elementos de cada una de las muestras de los estratos, el tamaño total de la muestra $n = n_1 + n_2, +...+ n_k$ y se calculan eligiendo los números n_1, n_2, ..., n_k proporcionales a los tamaños de los estratos N_1, N_2, ..., N_k, es decir

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_2}{N_2} = ... = \frac{n_k}{N_k} = \frac{n}{N}$$

En nuestro caso $\frac{n_1}{150} = \frac{n_2}{400} = \frac{10}{250} = \frac{n_4}{200} = \frac{n}{1000}$

De $\frac{10}{250} = \frac{n}{1000}$, tenemos $n = \frac{1000.10}{250}$ = 40, luego el tamaño de la muestra es "n = 40".

(b)
Sabemos que si tenemos una población con distribución normal N(μ,σ) y extraemos de ella muestras de tamaño n, *la distribución muestral de medias* $\overline{X}$ *sigue también una distribución normal:* N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$).

También sabemos que cuando la población no sigue una distribución normal, podemos aplicar el teorema central del límite que dice:
Si se toman muestras de tamaño n > 30 de una población, con una distribución cualquiera, media μ y una desviación típica σ, la distribución muestral de medias $\overline{X}$ se aproxima a una distribución normal N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$).

Sabemos que un *parámetro* es un valor numérico que describe una característica de la población (**μ, p, σ^2** , etc. Es decir la media, la proporción, la varianza, ….).

Sabemos que para la media poblacional **μ** el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y

generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el *error máximo* de la estimación es $E = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media.

De esta fórmula despejando "n" (tamaño de la muestra) tenemos $n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2$.

En nuestro caso de los datos del problema tenemos E = 1; σ = 6, nivel de confianza 1 – α = 95% = 0'95.

α = 1- 0'95 = 0'05, de donde $\alpha/2$ = 0'05/2 = 0'025

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - α/2 = 1 - 0'025 = 0'975 mirando en las tablas de la N(0,1) la probabilidad 0'975 vemos que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = z_{0'975}$ = 1'96.

En nuestro caso $n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2 = \left(\frac{1'96.6}{1} \right)^2$ = 138'2976, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es n = 139.