OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$.

a) (1'5 puntos) Determine el valor de *x* en la matriz *B* para que se verifique la igualdad $A\cdot B = B\cdot A$.

b) (1'5 puntos) Obtenga la matriz *C* tal que $A^t\cdot C = I_2$.

Solución

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$.

a)

Determine el valor de *x* en la matriz *B* para que se verifique la igualdad $A\cdot B = B\cdot A$.

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3x-1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

Igualando tenemos $3x - 1 = 5$, de donde **x = 2.**

b)

Obtenga la matriz *C* tal que $A^t\cdot C = I_2$.

Si la matriz $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ tiene inversa, multiplicando por dicha inversa por la izquierda la expresión $A^t\cdot C = I_2$, tenemos $(A^t)^{-1}\cdot A^t\cdot C = I_2\cdot(A^t)^{-1} \rightarrow I_2\cdot C = (A^t)^{-1}$, de donde $C = (A^t)^{-1}$.

Dada la matriz A^t si mediante transformaciones elementales de Gauss podemos pasar de $(A^t|I)$ a $(I|D)$ la matriz D es la inversa de A^t, es decir $D = (A^t)^{-1}$. También podemos calcularla con la fórmula

$$(A^t)^{-1} = \frac{1}{|A^t|}\cdot Adj((A^t)^t) = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A).$$

$$(A^t|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)_{F_2-2\cdot F_1} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) = (I|(A^t)^{-1}), \text{ luego } (A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Veámoslo por la fórmula:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1; \quad Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ luego } (A^t)^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego la matriz pedida es $C = (A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2_A

El valor, en miles de euros, de las existencias de una empresa en función del tiempo *t*, en años, viene dado por la función $f(t) = -4t^2 + 60t - 15$, $1 \le t \le 8$.

a) (1 punto) ¿Cuál será el valor de las existencias para *t* = 2? ¿Y para *t* = 4?

b) (1 punto) ¿Cuál es el valor máximo de las existencias? ¿En qué instante se alcanza?

c) (1 punto) ¿En qué instante el valor de las existencias es de 185 miles de euros?

Solución

El valor, en miles de euros, de las existencias de una empresa en función del tiempo *t*, en años, viene dado por la función $f(t) = -4t^2 + 60t - 15$, $1 \le t \le 8$.

a)

¿Cuál será el valor de las existencias para *t* = 2? ¿Y para *t* = 4?

Para t = 2, $f(2) = -4(2)^2 + 60(2) - 15 = 89$, es decir **las existencias son de 89000€.**

Para t = 4, $f(4) = -4(4)^2 + 60(4) - 15 = 161$, es decir **las existencias son de 161000€.**

b)

¿Cuál es el valor máximo de las existencias? ¿En qué instante se alcanza?

Como la gráfica de la función $f(t) = -4t^2 + 60t - 15$, $1 \le t \le 8$ es un trozo de parábola con las ramas hacia abajo (∩) el valor máximo se puede alcanzar en su vértice (abscisa solución de $f'(t) = 0$), o en los extremos del intervalo [1,8], si el vértice no está en el intervalo.

$f(t) = -4t^2 + 60t - 15 \rightarrow f'(t) = -8t + 60$.
De f '(t) = 0 tenemos -8t + 60 = 0, es decir t = 15/2 = 7'5.
$f(7'5) = -4(7'5)^2 + 60(7'5) - 15 = 210$. Como 7'5 está en el intervalo [1,8], el máximo es 210 y se alcanza en t= 7'5; es decir **el valor máximo de existencias es 210000€ y se alcanzan en 7'5 años** (7 años y medio).
c)
¿En qué instante el valor de las existencias es de 185 miles de euros?

Me están pidiendo que resuelva la ecuación f(t) = 185, y que las soluciones estén en el intervalo [1,8].
De f(t) = 185 tenemos $-4t^2 + 60t - 15 = 185$, es decir $0 = 4t^2 - 60t + 200$, simplificando resolvemos la ecuación $t^2 - 15t + 50 = 0$.

$t = \frac{-(-15) \pm \sqrt{15^2 - 4(50)}}{2} = \frac{15 \pm 5}{2}$, es decir las soluciones son t = 10 NO ESTÁ en [1,8] y t = 5 SI VALE, luego **las existencias son de 185000€ en el año 5**.

EJERCICIO 3_A

Parte I

Sean A y B dos sucesos independientes tales que p(B) = 0'05 y p(A/B) = 0'35.
a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que suceda al menos uno de ellos?
b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el suceso *A* pero no el *B*?

Solución

Sean A y B dos sucesos independientes tales que p(B) = 0'05 y p(A/B) = 0'35.
a)
¿Cuál es la probabilidad de que suceda al menos uno de ellos?

Sabemos que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$; A y B son independientes si $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$;

$p(A/B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$; $p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$; $p(A^C) = 1 - p(A)$.

Del problema tenemos: p(A) = 0'05 y p(A/B) = p(A) = 0'35 (por ser independientes).

Me piden **p(al menos uno de ellos)** = $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) = p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A)\cdot p(B) =$
= 0'05 + 0'35 – (0'05·0'35) **= 0'3825.**
b)
¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el suceso *A* pero no el *B*?

Me piden **p(A pero no el B)** = p(A y noB) = $p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$ = 0'05 - (0'05·0'35) **= 0'0325**.

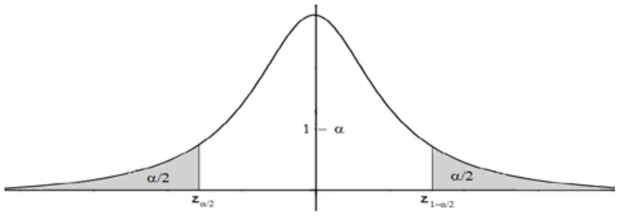
EJERCICIO 3_A

Parte II

La longitud de los tornillos fabricados por una máquina sigue una ley Normal con desviación típica 0'1 cm. Se ha seleccionado una muestra aleatoria y, con una confianza del 95%, se ha construido un intervalo, para la media poblacional, cuya amplitud es 0'0784 cm.
a) (1 punto) ¿Cuál ha sido el tamaño de la muestra seleccionada?
b) (1 punto) Determine el intervalo de confianza, si en la muestra seleccionada se ha obtenido una longitud media de 1'75 cm.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la <u>media</u> es $\overline{x} = (a + b)/2$, el <u>error máximo</u> de la estimación es $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es $b – a = 2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2\cdot E$, de donde $E = (b – a)/2$, por tanto el <u>tamaño mínimo</u> de la muestra es $n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b - a}\right)^2$.

La longitud de los tornillos fabricados por una máquina sigue una ley Normal con desviación típica 0'1 cm. Se ha seleccionado una muestra aleatoria y, con una confianza del 95%, se ha construido un intervalo, para la media poblacional, cuya amplitud es 0'0784 cm.
a)
¿Cuál ha sido el tamaño de la muestra seleccionada?

Datos del problema: σ = 0'1, amplitud = b – a = 0'0784, nivel de confianza = 95% = 0'96 = 1 - α, de donde α = 0'05, es decir $\alpha/2$ = 0'05/2 = 0'025.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'025 = 0'975. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96, por tanto:

De $n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b - a}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot 1'96\cdot 0'1}{0'0784}\right)^2$ = 25. El tamaño de la muestra es **n = 25.**

b)
Determine el intervalo de confianza, si en la muestra seleccionada se ha obtenido una longitud media de 1'75 cm.

Datos del problema: σ = 0'1, amplitud = b – a = 0'0784, nivel de confianza = 95%; $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96, $\overline{x}$ = 1'75.

Por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (\overline{x}\text{-(b-a)/2}, \overline{x}\text{-(b-a)/2}) = (1'75 - 0'0784/2, 1'75 + 0'0784/2) =$$

= **(1'7108, 1'7892).**

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

Sea el sistema de inecuaciones siguiente:

$x + y \le 600$, $x \le 500$, $y \le 3x$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

a) (2 puntos) Represente gráficamente el conjunto de soluciones del sistema y calcule sus vértices.
b) (1 punto) Halle el punto del recinto anterior en el que la función F(x, y) = 38x + 27y alcanza su valor máximo.

Solución

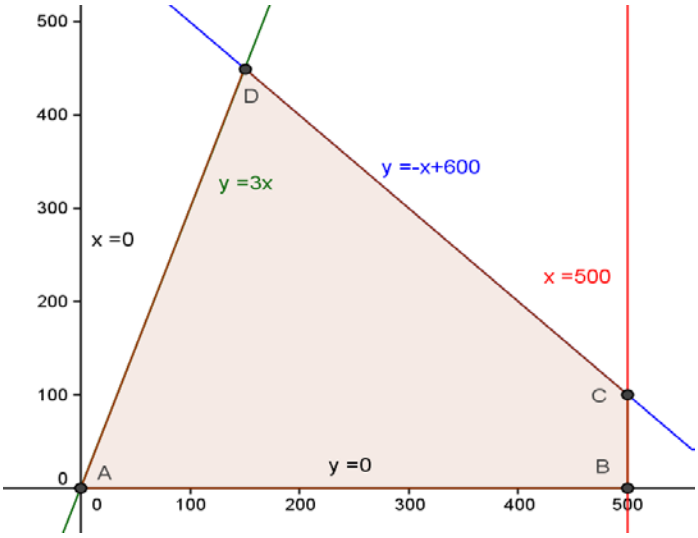
(a) y (b)
Función Objetivo **F(x,y) = 38x + 27y**.
Restricciones:

Que son las desigualdades $x + y \le 600$, $x \le 500$, $y \le 3x$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; y las transformamos en igualdades, y ya son rectas, $x + y = 600$, $x = 500$, $y = 3x$, $x = 0$, $y = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$y = -x + 600$; $x = 500$; $y = 3x$; $x = 0$; $y = 0$;

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones de las rectas de dos en dos.

De x = 0 e y = 0. El punto de corte es A(0,0).
De y = 0 y x = 500. El punto de corte es B(500,0).
De x = 500 e y = -x + 600, tenemos y = 100. El punto de corte es C(500,100).
De y = -x + 600 e y = 3x; tenemos -x + 600 = 3x, es decir 600 = 4x, luego x = 150 e y = 450, y el punto de corte es D(150,450)

Vemos que los vértices del recinto son: A(0;0), B(500,0), C(500; 100) y D(150,450)**.**

Calculemos el máximo de la función F(x,y) = 38x + 27y en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0;0), B(500,0), C(500; 100) y D(150,450)**.** En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(0,0) = 38(0) + 27(0) = 0; F(500,0) = 38(500) + 27(0) = 19000;
F(500,100) = 38(500) + 27(100) = 21700; F(150,450) = 38(150) + 27(450) = 17850.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 21700** (el valor mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(500,100)**.

EJERCICIO 2_B

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} & \text{si } x \le 4 \\ 2x - 8 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

a) (1'5 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de esta función.
b) (1'5 puntos) Represéntela gráficamente e indique, a la vista de la gráfica, su monotonía y sus extremos.

Solución

Se considera la función definida por $f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} & \text{si } x \le 4 \\ 2x - 8 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

a)
Estudie su derivabilidad en *x* = 0.

Sabemos que si una función es derivable, la función es continua.

$2x - x^2/2$ es un función polinómica, por tanto continua y derivable en R, en particular en x < 4.
2x – 8 es un función polinómica, por tanto continua y derivable en R, en particular en x > 4.
Veamos la continuidad y derivabilidad de f en x = 4

Como f es continua en x = 4, tenemos $f(4) = \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x)$.

$f(4) = \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (2x - x^2/2) = 8 - 8 = 0$.

$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} (2x - 8) = 8 - 8 = 0$. Como ambas expresiones son iguales, f es continua en x = 4, por tanto **f es continua en R**.

Tenemos $f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} & \text{si } x \le 4 \\ 2x - 8 & \text{si } x > 4 \end{cases}$, de donde: $f'(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 4 \\ 2 & \text{si } x > 4 \end{cases}$.

Sabemos que f es derivable en x = 4, si f'(4+) = f'(4-), es decir $\lim_{x\to 4^-} f'(x) = \lim_{x\to 4^+} f'(x)$. Estamos viendo la continuidad de la derivada (es más sencillo).

$\lim_{x\to 4^-} f'(x) = \lim_{x\to 4^-} (2 - x) = -2$.

$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} (2) = 2$. Como $-2 \neq 2$, $\lim_{x\to 4^-} f'(x) \neq \lim_{x\to 4^+} f(x)$, luego la función f no es derivable en x = 4, por tanto **f es derivable en R – {4}**.

b)

Represéntela gráficamente e indique, a la vista de la gráfica, su monotonía y sus extremos.

Si $x \le 4$, $f(x) = 2x - x^2/2$**.**

Su gráfica es un trozo de parábola con las ramas hacia abajo ($\cap$), porque el nº que multiplica a x^2 es negativo (-), luego es cóncava (en Andalucía). La abscisa de su vértice V es la solución de f '(x) = 0, es decir 2 – x = 0, de donde x = 2, y V(2,f(2)) = V(2,2) que es un máximo relativo.

Los puntos de corte son:

Para x = 0, punto (0,f(0)) = (0,6).

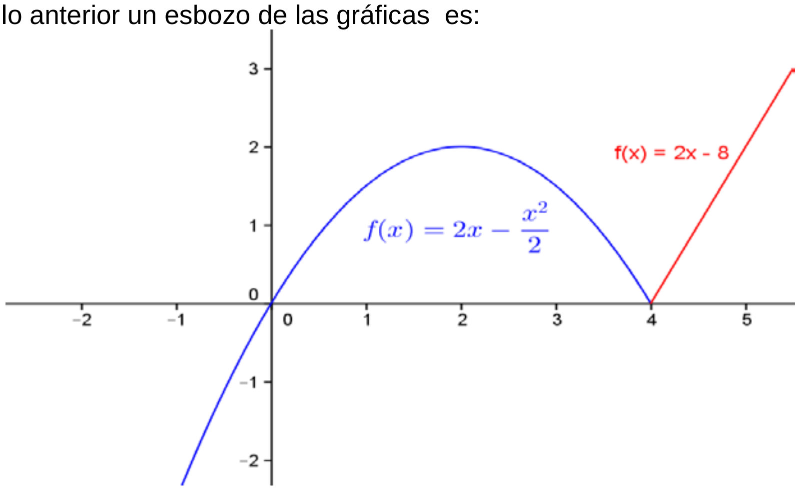
Para f(x) = 0, $2x - x^2/2 = 0$, de donde x(2 - x/2) = 0, y tiene por soluciones x = 0, punto (0,0) y 2 – x/2 = 0, es decir x = 4, luego el punto es (4, 0)reales, por tanto no corta al eje OX (lo podríamos ver antes por la forma de la parábola y el punto vértice que es el mínimo absoluto).

$f(x) = x^2 - 4x + 6$**,**   f'(x) = 2x – 4**,**   f''(x) = 2 > 0, luego f es convexa **($\cup$).**

Si x > 4, f(x) = 2x - 8**.**

Su gráfica es una recta, y con dos puntos es suficiente para dibujarla. El (4,0), porque es continua y el (5,2).

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de las gráficas es:



Observando la gráfica vemos que f es **estrictamente creciente en (-∞,2)∪(4,+∞).**

Vemos que f es **estrictamente decreciente en (2,4).**

Tiene **un máximo relativo en (2,2)**, que es vértice la rama parabólica, y un **mínimo relativo en (4,0).**

EJERCICIO 3_B

Parte I

En un determinado curso el 60% de los estudiantes aprueban Economía y el 45% aprueban Matemáticas. Se sabe además que la probabilidad de aprobar Economía habiendo aprobado Matemáticas es 0'75.

a) (1 punto) Calcule el porcentaje de estudiantes que aprueban las dos asignaturas.

b) (1 punto) Entre los que aprueban Economía ¿qué porcentaje aprueba Matemáticas?

Solución

En un determinado curso el 60% de los estudiantes aprueban Economía y el 45% aprueban Matemáticas.

Se sabe además que la probabilidad de aprobar Economía habiendo aprobado Matemáticas es 0'75.
a)
Calcule el porcentaje de estudiantes que aprueban las dos asignaturas.

Sean los sucesos A y B los sucesos " aprobar economía" y "aprobar matemáticas" respectivamente.
El problema nos dice que p(A) = 60% = 0'6, p(B) = 45% = 0'45 y p(A/B) = 0'75.

Sabemos que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$; $p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$.

De $p(A/B) = 0'75 = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$, tenemos $p(A\cap B)$ = **p(aprueban las dos asignaturas)** = 0'75·0'45 = 0'3375, es decir aprueban las dos asignaturas **el 33'75% de los alumnos.**

b)
Entre los que aprueban Economía ¿qué porcentaje aprueba Matemáticas?

Me piden **p(B/A)** = $\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$ = 0'3375/ 0'6 **= 0'5625 = 56'25%, es decir el 56'25% de los alumnos que han aprobado la economía aprueba también las matemáticas.**

EJERCICIO 3_B

Parte II

El número de horas semanales que los adolescentes dedican a ver la televisión se distribuye según una ley Normal de media 9 horas y desviación típica 4. Para muestras de 64 adolescentes:
a) (0'5 puntos) Indique cuál es la distribución de las medias muestrales.
b) (1'5 puntos) Calcule la probabilidad de que la media de una de las muestras esté comprendida entre 7'8 y 9'5 horas.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Trabajamos en una normal N(0,1), para lo cual tenemos que tipificar la variable en la distribución muestral de medias, es decir $Z = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

El número de horas semanales que los adolescentes dedican a ver la televisión se distribuye según una ley Normal de media 9 horas y desviación típica 4. Para muestras de 64 adolescentes:
a)
Indique cuál es la distribución de las medias muestrales.

Datos del problema: Ver T.V. → $N(\mu, \sigma) = N(9, 4)$; $\mu = 9$; $\sigma = 4$; $n = 64$;

La distribución de las medias muestrales es $\overline{X} \to N(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(9, \dfrac{4}{\sqrt{64}}) = N(9, 4/8) = N(9, 0'5)$

b)
Calcule la probabilidad de que la media de una de las muestras esté comprendida entre 7'8 y 9'5 horas.

Me están pidiendo la probabilidad "$p(7'8 \le \overline{X} \le 9'5)$"

Luego $p(7'8 \le \overline{X} \le 9'5)$ = {tipificamos} = $p(\dfrac{7'8 - 9}{0'5} \le Z \le \dfrac{9'5 - 9}{0'5}) = p(-2'40 \le Z \le 1'00)$ =
= $p(Z \le 1'00) - p(Z \le -2'40) = p(Z \le 1'00) - [1 - p(Z \le 2'40)]$ = {Mirando en la tabla} =
= 0'8413 – (1 – 0'9918) **= 0'8331**.