OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcule la matriz $C = B\cdot A - A^t\cdot B^t$.

b) (2 puntos) Halle la matriz X que verifique $A\cdot B\cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Solución

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

a)
Calcule la matriz $C = B\cdot A - A^t\cdot B^t$.

$$C = B\cdot A - A^t\cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b)

Halle la matriz X que verifique $A\cdot B\cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dada la matriz A·B, si mediante transformaciones elementales de Gauss podemos pasar de (A·B|I) a (I|D), la matriz D es la inversa de A·B, es decir $D = (A\cdot B)^{-1}$. También podemos calcularla con la fórmula

$$(A\cdot B)^{-1} = \frac{1}{|A\cdot B|}\cdot Adj((A\cdot B)^t).$$

$$(A\cdot B|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} -6 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} F_1 - 2\cdot F_2 \\ \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ F_2 + 2\cdot F_1 \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right)\begin{matrix} F_1\cdot(-1) \\ F_2\cdot(-1) \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ F_2/(3) \end{matrix} =$$

$$\approx \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2/3 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \text{Cambio} \\ F_1 \text{ por } F_2 \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2/3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$= (I|(A\cdot B)^{-1})$, luego $(A\cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = (1/3)\cdot\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

Veámoslo por la fórmula:

$|A\cdot B| = \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -12 - (9) = -3$; $(A\cdot B)^t = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $Adj((A\cdot B)^t) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, luego $(A\cdot B)^{-1} =$

$= \dfrac{1}{|A\cdot B|}\cdot Adj((A\cdot B)^t) = (1/-3)\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, que como vemos sale lo mismo.

Multiplicamos por la izquierda la expresión $A\cdot B\cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, por $(A\cdot B)^{-1}$ quedándonos:

$(A\cdot B)^{-1}\cdot(A\cdot B)\cdot X = (A\cdot B)^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow I\cdot X = (A\cdot B)^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, de donde $X = (A\cdot B)^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Calculamos ya $\mathbf{X} = (A\cdot B)^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = (1/3)\cdot\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = (1/3)\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2_A

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) (1'5 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f.
b) (0'5 puntos) Calcule sus asíntotas.
c) (1 punto) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2.

Solución

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a)
Estudie la continuidad y la derivabilidad de f.

Sabemos que si una función es derivable, la función es continua. Al revés es falso.
2^x es una función exponencial, por tanto continua y derivable en R, en particular en x < 1.
$\dfrac{2}{x}$ es una función racional, por tanto continua y derivable en R – {n^{os} anulan denominador} = R – {0}, en particular en x > 1.
Veamos la continuidad y derivabilidad de f en x = 1.

Si f es continua en x = 1, tendremos $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$.

$f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{2}{x} = 2/1 = 2$.

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2^x) = 2^1 = 2$. Como ambas expresiones son iguales, f es continua en x = 1. Luego **f es continua en R.**

Tenemos $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, de donde $f'(x) = \begin{cases} 2^x\cdot\ln(2) & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{0 - 2\cdot 1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 2^x\cdot\ln(2) & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{-2}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Sabemos que f es derivable en x = 1, si f'(1+) = f'(1-), es decir $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$. Estamos viendo la continuidad de la derivada (es más sencillo).
$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} 2^x\cdot\ln(2) = 2^1\cdot\ln(2) = 2\cdot\ln(2)$.

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{-2}{x^2} = -2/(1)^2 = -2$. Como $2\cdot\ln(2) \neq -2$, $\lim_{x\to 1^-} f'(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$, luego la función f no es derivable en x = 1. Luego **f es derivable en R – {1}.**

b)
Calcule sus asíntotas.

Sabemos que las funciones exponenciales tienen una asíntota horizontal (A.H.), pero sólo en $+\infty$ o en $-\infty$, en nuestro caso sólo en $+\infty$. Además las funciones racionales tienen una asíntota horizontal (A.H.) si coincide el grado del numerador con el del denominador ó si el grado del denominador es mayor, que es nuestro caso, y además dicha A.H. es la misma en $\pm\infty$, en nuestro caso sólo en $+\infty$.
También sabemos que los números que anulan el denominador son asíntotas verticales (A.V.) si el límite en dicho número es ∞, que también es nuestro caso, pero como x = 0 no está en el dominio x > 1, no nos sirve.

Como $\lim_{x\to -\infty} 2^x = 2^{-\infty} = 1/(2^{+\infty}) = 1/+\infty = 0^+$, la recta y = 0 es una A.H. en $-\infty$.

Como $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2}{x} = 2/+\infty = 0^+$, la recta y = 0 es una A.H. en $+\infty$.

Por tanto **la recta y = 0 es una asíntota horizontal de f en $\pm\infty$.**

c)
Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2.

El punto x = 2 está en la rama $x \geq 1$, donde f(x) = 2/x y $f'(x) = -2/x^2$.

La recta tangente en x = 2 es y – f(2) = f'(1)(x – 2)
Luego f(2) = 2/2 = 1 y f'(2) = $-2/2^2$ = -1/2, por tanto **la recta tangente es y – 1 = (-1/2)(x – 2), es decir y = -x/2 + 2.**

EJERCICIO 3_A

Parte I
En un juego se sortea cada día un premio utilizando papeletas con tres cifras, numeradas del 000 al 999.
a) (0'75 puntos) Calcule la probabilidad de que el número premiado termine en 5.
b) (0'75 puntos) Calcule la probabilidad de que el número premiado termine en 55.
c) (0'5 puntos) Sabiendo que ayer salió premiado un número terminado en 5, calcule la probabilidad de que el número premiado hoy también termine en 5.

Solución

En un juego se sortea cada día un premio utilizando papeletas con tres cifras, numeradas del 000 al 999.
a)
Calcule la probabilidad de que el número premiado termine en 5.

Sean "5" y "55" los sucesos "los sucesos "números terminados en 5" y "los sucesos "números terminados en 55".

Como el número premiado un día no depende del número premiado el día anterior, por tanto los sucesos son independientes, es decir $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$.

Sabemos que $p(A) = \dfrac{\text{Nº de casos favorables}}{\text{Nº de casos posibles}}$, $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$, $p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(A)\cdot p(B)}{p(B)} = p(A)$.

Casos posibles = 1000
Números terminados en 5.
Entre 000 y 099 hay 10, el 005,015, 025, 035, 045, 055, 065, 075, 085 y 095.
Entre 100 y 199 hay 10, el 105,115, 125, 135, 145, 155, 165, 175, 185 y 195.
Siguiendo el mismo razonamiento hay 10 entre 200 y 299, otros 10 entre 300 y 399, otros 10 entre 400 y 499, otros 10 entre 500 y 599, otros 10 entre 600 y 699, otros 10 entre 700 y 799, otros 10 entre 800 y 899 y otros 10 entre 900 y 999. En total *hay 10x10 = 100 números terminados en "5"*.

Me piden p(número premiado termine en "5") = $\dfrac{\text{Nº terminado en "5"}}{\text{Total de números}}$ = 100/1000 = 1/10 = 0'1.

b)
Calcule la probabilidad de que el número premiado termine en 55.

Casos posibles = 1000
Números terminados en 55.
Entre 000 y 099 hay 1, el 055.
Entre 100 y 199 hay 1, el 155.
Siguiendo el mismo razonamiento hay 1 entre 200 y 299, 1 entre 300 y 399, 1 entre 400 y 499, 1 entre 500 y 599, 1 entre 600 y 699, 1 entre 700 y 799, 1 entre 800 y 899 y 1 entre 900 y 999. En total *hay 1x10 = 10 números terminados en "55"*.

Me piden p(número premiado termine en "55") = $\dfrac{\text{Nº terminado en "55"}}{\text{Total de números}}$ = 10/1000 = 1/100 = 0'01.

c)
Sabiendo que ayer salió premiado un número terminado en 5, calcule la probabilidad de que el número premiado hoy también termine en 5.

Como los sucesos son independientes p(número premiado hoy también termine en 5/ número premiado ayer también termine en 5) = p(número premiado hoy también termine en 5) =

= $\dfrac{\text{Nº terminado en "5"}}{\text{Total de números}}$ = 100/1000 = 1/10 = 0'1.

EJERCICIO 3_A

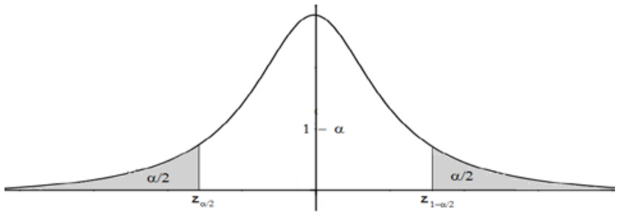
Parte II
En una población una variable aleatoria sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 2.
a) (1 punto) Observada una muestra de tamaño 400, tomada al azar, se ha obtenido una media muestral igual a 50. Calcule un intervalo, con el 97% de confianza, para la media de la población.

b) (1 punto) Con el mismo nivel de confianza, ¿qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que la amplitud del intervalo que se obtenga sea, como máximo, 1?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y

generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el <u>error máximo</u> de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, para el intervalo de la media.*

Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2· $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$*.*

En una población una variable aleatoria sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 2.
a)
Observada una muestra de tamaño 400, tomada al azar, se ha obtenido una media muestral igual a 50. Calcule un intervalo, con el 97% de confianza, para la media de la población.

Datos del problema: $\sigma = 2$, $n = 400$, $\overline{x} = 50$, nivel de confianza = 97% = 0'97 = 1 - α, de donde α = 0'03, con lo cual $\alpha/2$ = 0'03/2 = 0'015
De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'015 = 0'985$. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'985 viene, y corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 2'17$, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(50 - 2'17\cdot\frac{2}{\sqrt{400}}, 50 + 2'17\cdot\frac{2}{\sqrt{400}}\right) = \mathbf{(49'783, 50'217)}$$

b)
Con el mismo nivel de confianza, ¿qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que la amplitud del intervalo que se obtenga sea, como máximo, 1?

Datos del problema: $\sigma = 2$, amplitud = 2E < 1, de donde E < 0'5, ya teníamos que $z_{1-\alpha/2} = 2'17$.

De $n > \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'17\cdot 2}{0'5}\right)^2 \cong 75'3424$, es decir **el tamaño mínimo es n = 76**.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

Sea el siguiente sistema de inecuaciones:

$$2x - 3y \le 6; \quad x \ge 2y - 4; \quad x + y \le 8; \quad x \ge 0; \quad y \ge 0.$$

a) (2 puntos) Dibuje la región que definen y calcule sus vértices.
b) (1 punto) Halle los puntos de esa región en los que la función F(x,y) = 2x + 3y alcanza los valores máximo y mínimo y calcule dichos valores.

Solución

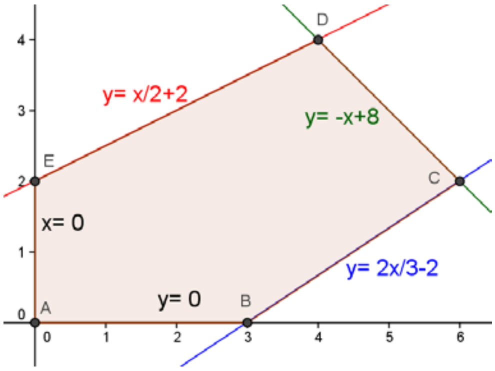
(a) y (b)
Función Objetivo **F(x,y) = 2x + 3y.**
Restricciones:

Que son las desigualdades $2x - 3y \le 6$; $x \ge 2y - 4$; $x + y \le 8$; $x \ge 0$; $y \ge 0$; y las transformamos en igualdades, y ya son rectas, $2x - 3y = 6$; $x = 2y - 4$; $x + y = 8$; $x = 0$; $y = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y", y tenemos

$$y = 2x/3 - 2; \quad y = x/2 + 2; \quad y = -x + 8; \quad x = 0; \quad y = 0;$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones de las rectas de dos en dos.

De x = 0 e y = 0. Punto de corte es A(0,0).
De y = 0 e y = 2x/3 - 2, tenemos 0 = 2x/3 - 2, es decir 6 = 2x, luego x = 3 y el punto de corte es B(3,0).
De y = 2x/3 - 2 e y = -x + 8, tenemos 2x/3 - 2 = -x + 8, de donde 2x – 6 = -3x + 24, es decir 5x = 30, luego x = 6 e y = 2, y el punto de corte es C(6,2).
De y = -x + 8 e y = x/2 + 2, tenemos -x + 8 = x/2 + 2, es decir -2x + 16 = x + 4, luego 12 = 3x, por tanto x=4 e y = 4 y el punto de corte es D(4,4).
De x = 0 e y = x/2 + 2, tenemos y = 2, y el punto de corte es E(0,2).

Vemos que los vértices del recinto son: A(0,0), B(3,0), C(6,2), D(4,4) y E(0,2).

Calculemos los extremos de la función F(x,y) = 2x + 3y en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,0), B(3,0), C(6,2), D(4,4) y E(0,2). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(0,0) = 2(0) + 3(0) **= 0**; F(3,0) = 2(3) + 3(0) = 6; F(6,2) = 2(6) + 3(2) = 18;
F(4,4) = 2(4) + 3(4) = **20**; F(0,2) = 2(0) +3(2) = 6.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 20 (el valor mayor en los vértices) y se alcanza en el vértice D(4,4) y el mínimo absoluto de la función F en la región es 0 (el valor menor en los vértices) y se alcanza en el vértice A(0,0)**.

EJERCICIO 2_B

El beneficio, en millones de euros, de una empresa en función del tiempo t, en años, viene dado por:

$$f(t) = -t^2 + 12t - 31, \quad 4 \le t \le 7.$$

a) (1'5 puntos) Represente la gráfica de la función f.
b) (1'5 puntos) ¿Para qué valor de t alcanza la empresa su beneficio máximo y a cuánto asciende? ¿Para qué valor de t alcanza su beneficio mínimo y cuál es éste?

Solución

El beneficio, en millones de euros, de una empresa en función del tiempo t , en años, viene dado por:

$$f(t) = -t^2 + 12t - 31, \quad 4 \le t \le 7.$$

a)
Represente la gráfica de la función f.

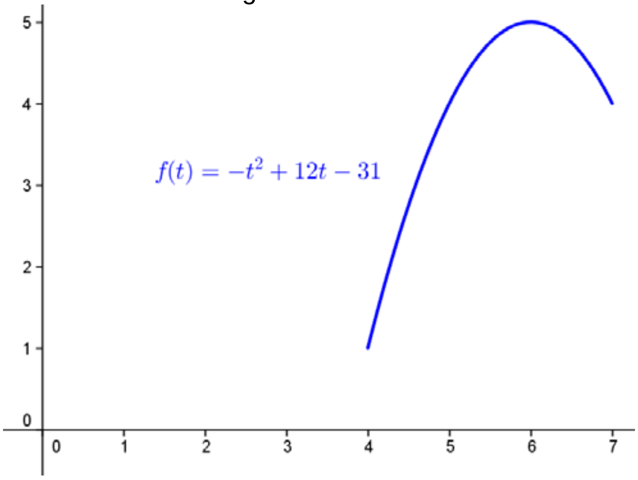
Para $4 \le t \le 7$, $f(t) = -t^2 + 12t - 31$
Su gráfica es trozo de parábola con las ramas hacia abajo ($\cap$), porque el nº que multiplica a t^2 es negativo (-), luego es cóncava (en Andalucía). La abscisa del vértice es el número que anula la 1ª derivada f '(t).

$f(t) = -t^2 + 12t - 31$, $f'(t) = -2t + 12$, de $f'(t) = 0$ tenemos $-2t + 12 = 0$, luego $t = 6$ y el vértice es $V(6,f(6)) =$
$= V(6,5)$, que es un máximo relativo.

Como conocemos el vértice V, f crece $(\nearrow)$ en (4,6) y decrece $(\searrow)$ en (6,7)

Como estamos en un segmento tenemos que darle los valores de los extremos, es decir:
$f(4) = -(4)^2 + 12(4) - 31 = 1$. Punto (4,1)
$f(7) = -(7)^2 + 12(7) - 31 = 10$. Punto (7,4)

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica de f es:



b)
¿Para qué valor de t alcanza la empresa su beneficio máximo y a cuánto asciende? ¿Para qué valor de t alcanza su beneficio mínimo y cuál es éste?

Observando la gráfica vemos que el beneficio **máximo es de** *5 millones de euros*, y se **alcanza en t = 6, es decir se alcanza en el año sexto (se alcanza en el vértice V(6,5)). El beneficio mínimo es de** *1 millón de euros*, y **se alcanza en t = 4, es decir en el cuarto año.**

EJERCICIO 3_B

Parte I
Una bolsa contiene tres cartas: una es roja por las dos caras, otra tiene una cara blanca y otra roja, y la tercera tiene una cara negra y otra blanca. Se saca una carta al azar y se muestra, también al azar, una de sus caras.
a) (0'75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la cara mostrada sea roja?
b) (0'75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la cara mostrada sea blanca?
c) (0'5 puntos) Si la cara mostrada es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la otra cara sea roja?

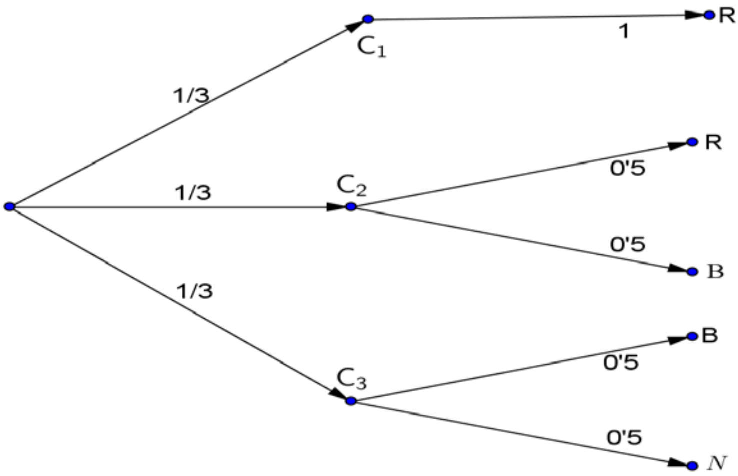
Solución

Una bolsa contiene tres cartas: una es roja por las dos caras, otra tiene una cara blanca y otra roja, y la tercera tiene una cara negra y otra blanca. Se saca una carta al azar y se muestra, también al azar, una de sus caras.

Llamemos C_1, C_2, C_3, R, B y N a los sucesos siguientes, "carta 1", "carta 2", " carta 3", "cara mostrada es roja". "cara mostrada es blanca" y " cara mostrada es negra ", respectivamente.

Además tenemos $p(C_1) = p(C_2) = p(C_3) = 1/3$, $p(R/C_1) = 1$, $p(R/C_2) = 1/2 = 0'5$, $p(B/C_2) = 0'5$, $p(B/C_3) = 0'5$ y $p(N/C_3) = 0'5$.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



a)
¿Cuál es la probabilidad de que la cara mostrada sea roja?

p(R) = $p(C_1).p(R/C_1) + p(C_2).p(R/C_2) = (1/3)\cdot(1) + (1/3)\cdot(0'5) = 1/2$ **= 0'5**.

b)
¿Cuál es la probabilidad de que la cara mostrada sea blanca?

p(B) = $p(C_2).p(B/C_2) + p(C_3).p(B/C_3) = (1/3)\cdot(0'5) + (1/3)\cdot(0'5) = 1/3 \cong$ **0'3333**.

c)
Si la cara mostrada es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la otra cara sea roja?

Mirando el diagrama de árbol, lo que piden sólo se dá en la carta 2.

$$\mathbf{p(C_2/B)} = \frac{p(C_2 \cap B)}{p(B)} = \frac{p(C_2).p(B/C_2)}{p(B)} = \frac{(1/3)\cdot(0'5)}{1/3} = \mathbf{0'5}.$$

EJERCICIO 3_B
Parte II
Sea la población de elementos {22, 24, 26}.
a) (0'5 puntos) Escriba todas las muestras posibles de tamaño 2, escogidas mediante muestreo aleatorio simple.
b) (0'75 puntos) Calcule la varianza de la población.
c) (0'75 puntos) Calcule la varianza de las medias muestrales.

Solución

Sea la población de elementos {22, 24, 26}.
Escriba todas las muestras posibles de tamaño 2, escogidas mediante muestreo aleatorio simple.
Calcule la varianza de la población.
Calcule la varianza de las medias muestrales.
(a), (b) y (c)

Población {22, 24, 26}
Media de la población = μ = (22 + 24 + 26)/3 = 24.
Varianza de la población = $\sigma^2 = \Sigma(\text{elementos} - \mu)^2/3 = (1/3)\cdot[(22-24)^2 + (24-24)^2 + (26-24)^2] =$
$= (1/3)\cdot(2^2 + 0^2 + 2^2) = 8/3$

Construyamos la distribución muestral de medias y, para ello, calculamos la media de todas las muestras posibles con reemplazamiento de tamaño 2 que son 9. Los resultados pueden verse en la tabla siguiente:

	MUESTRAS								
Elementos	22 22	22 24	22 26	24 22	24 24	24 26	26 22	26 24	26 26
Media de la muestra $\overline{x}_i$	22	23	24	23	24	25	24	25	26

La distribución muestral de medias puede verse en la tabla que sigue.

x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$	$n_i \cdot (x_i)^2$
22	1	22	484
23	2	46	1058
24	3	72	1728
25	2	50	1250
26	1	26	676
$\sum$	**N=9**	**216**	**5196**

La media de la distribución muestral de medias (media de las medias muestrales) es:

$\mu_x = \overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{N} = \dfrac{216}{9} = 24$. (Coincide media poblacional y media muestral)

La varianza de la distribución muestral de medias es:

$\boldsymbol{\sigma_x^2} = \dfrac{\sum n_i \cdot (x_i)^2}{N} - \overline{x}^2 = \dfrac{5196}{9} - (24)^2 = \dfrac{4}{3} \cong$ **1’3333.** (Vemos que $\sigma_x^2 = \sigma^2/n$, siendo n el tamaño de la muestra, en este caso 2)