PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2004

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

De la función $f:(-1,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ se sabe que $f'(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}$ y que $f(2)=0$.

a) Determina *f*.
b) Halla la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por $(0,1)$.
MATEMÁTICAS II. 2004. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos $f(x)$.

$$f(x)=\int\frac{3}{(x+1)^2}\,dx=3\cdot\int(x+1)^{-2}\,dx=3\frac{(x+1)^{-1}}{-1}=\frac{-3}{x+1}+C$$

Como queremos que pase por el punto $(2,0)$, tenemos:

$$f(2)=0\Rightarrow-\frac{3}{3}+C=0\Rightarrow C=1$$

Por lo tanto, la primitiva que nos piden será: $f(x)=\dfrac{-3}{x+1}+1$

b) Calculamos una primitiva de $f(x)$.

$$F(x)=\int\left(\frac{-3}{x+1}+1\right)dx=-3\ln(x+1)+x+C$$

Como queremos que pase por el punto $(0,1)$, tenemos:

$$F(0)=1\Rightarrow-3\ln(0+1)+0+C=1\Rightarrow C=1$$

Por lo tanto, la primitiva que nos piden será: $F(x)=-3\ln(x+1)+x+1$

Determina b sabiendo que $b > 0$ y que el área de la región limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = bx$ es igual a $\frac{9}{2}$.

MATEMÁTICAS II. 2004. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte entre las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = bx \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - bx = 0 \Rightarrow x = 0 \ ; \ x = b$$

$$A = \int_0^b (bx - x^2)\ dx = \left[\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^b = \frac{b^3}{6} = \frac{9}{2} \Rightarrow b = 3$$

Calcula $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos las raíces del denominador: $x^2+2x-3=0 \Rightarrow x=1$; $x=-3$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2+2x-3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=1 \Rightarrow 1=4A \Rightarrow A=\frac{1}{4}$$

$$x=-3 \Rightarrow 1=-4B \Rightarrow B=-\frac{1}{4}$$

Con lo cual:

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2+2x-3}dx=\frac{1}{4}\int_{-2}^{0}\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{4}\int_{-2}^{0}\frac{1}{x+3}dx=\frac{1}{4}\left[\ln(x-1)\right]_{-2}^{0}-\frac{1}{4}\left[\ln(x+3)\right]_{-2}^{0}=-\frac{\ln 3}{2}$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=(x-1)\cdot e^{2x}$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1,e^2)$.
MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x-1;\ du=dx \\ dv=e^{2x}\,dx;\ v=\dfrac{e^{2x}}{2} \end{array}}$$

$$\int (x-1)\cdot e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}(x-1)\cdot e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}(x-1)\cdot e^{2x}-\frac{1}{4}\cdot e^{2x}+C$$

Calculamos una primitiva que pase por el punto $(1,e^2)$.

$$e^2=\frac{1}{2}\cdot(1-1)\cdot e^2-\frac{1}{4}e^2+C\Rightarrow C=\frac{5}{4}e^2$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)\cdot e^{2x}-\dfrac{1}{4}\cdot e^{2x}+\dfrac{5}{4}\cdot e^2$

Considera la integral definida $I=\int_{1}^{9}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

a) Expresa la anterior integral definida aplicando el cambio de variables $1+\sqrt{x}=t$.
b) Calcula *I*.
MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$1+\sqrt{x}=t\Rightarrow x=(t-1)^2$$
$$dx=2\cdot(t-1)\ dt$$

Calculamos los nuevos límites de integración: $\begin{array}{l} x=1\Rightarrow t=2 \\ x=9\Rightarrow t=4 \end{array}$

Con lo cual:

$$I=2\int_{2}^{4}\frac{t-1}{t}dt=2\int_{2}^{4}\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=2\cdot\left[t-\ln t)\right]_{2}^{4}=4-2\ln 2$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1$.

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en un punto de la misma de ordenada $y=1$, teniendo en cuenta que dicha recta tangente tiene pendiente negativa.

b) Calcula el área de la región del plano limitada por la gráfica de *f*, la recta tangente obtenida y el eje de ordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) $1=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1\Rightarrow -x^2+2x=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=2$

$$f'(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}\Rightarrow\begin{cases} f'(0)=\frac{2}{3} \\ f'(2)=-\frac{2}{3}\end{cases}$$

Luego: $\left.\begin{array}{l} P(2,1) \\ f'(2)=m=-\frac{2}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow y-1=-\frac{2}{3}(x-2)\Rightarrow y=\frac{-2x+7}{3}$

b)

$$A=\int_0^2\left[\left(\frac{-2x+7}{3}\right)-\left(\frac{-x^2+2x+3}{3}\right)\right]dx=\int_0^2\left[\frac{x^2-4x+4}{3}\right]dx=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right]_0^2=\frac{8}{9}\ u^2$$

Considera las funciones $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas, respectivamente, por

$$f(x)=Ln\,x \quad \text{y} \quad g(x)=1-2^{x}$$

siendo *Ln x* el logaritmo neperiano de *x*. Calcula el área del recinto limitado por las rectas $x=1$ y $x=2$ y las gráficas de *f* y *g*.

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$A=\int_{1}^{2}\left[\ln x-\left(1-2^{x}\right)\right]dx=\left[x\ln x-x-x+\frac{2^{x}}{\ln 2}\right]_{1}^{2}=2\ln 2-2+\frac{2}{\ln 2}\ u^{2}$$

Determina b sabiendo que $b > 0$ y que el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y=\left(\frac{1}{3}x-b\right)^2$ y los ejes coordenados es igual a 8.

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$y=\left(\frac{1}{3}x-b\right)^2=\frac{x^2-6bx+9b^2}{9}$$

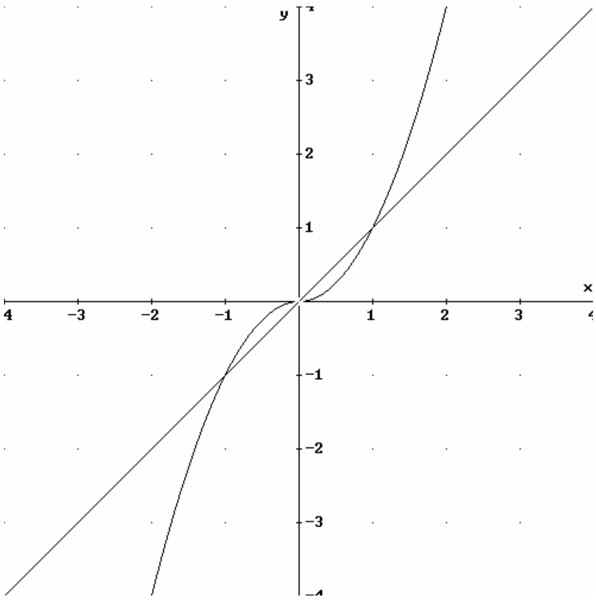
Vértice $-\frac{b}{2a}=\frac{\frac{6b}{9}}{\frac{2}{9}}=3b\Rightarrow(3b,0)$

$$A=\int_0^{3b}\frac{x^2-6bx+9b^2}{9}\,dx=\frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{6bx^2}{2}+9b^2x\right]_0^{3b}=\frac{1}{9}\left[\frac{27b^3}{3}-\frac{54b^3}{2}+27b^3\right]=b^3=8\Rightarrow b=2$$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x\,|x|$.
a) Dibuja la región acotada del plano que está limitada por la gráfica de f y la bisectriz del primer y tercer cuadrante.
b) Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Abrimos la función: $f(x)=x\,|x|=\begin{cases} x^2 & si \;\; x\geq 0 \\ -x^2 & si \;\; x<0 \end{cases}$



b)

$$A=2\cdot\int_0^1 \left[x-x^2\right]dx=2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}\;u^2$$

Considera la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{x}+4e^{-x}$.
a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f* y halla sus extremos absolutos o globales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=2$.
MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada y la igualamos a cero.

$$y'=e^{x}-4e^{-x}=0\Rightarrow e^{2x}-4=0\Rightarrow x=\ln 2$$

	$(-\infty,\ln 2)$	$(\ln 2,\infty)$
Signo y'	–	+
Función	D	C

$\downarrow$

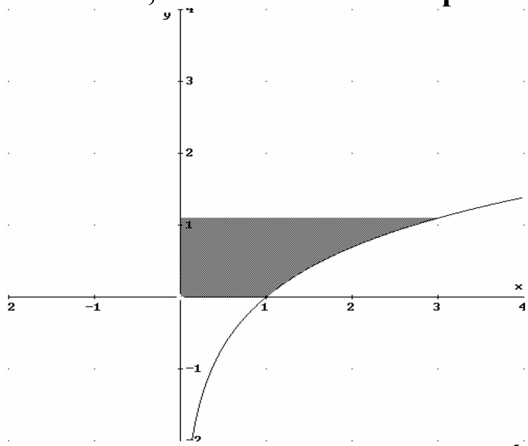
mínimo $(\ln 2, 4)$

No tiene máximo absoluto y el mínimo absoluto coincide con el mínimo relativo.

b)

$$A=\int_{0}^{2}\left[e^{x}+4e^{-x}\right]dx=\left[e^{x}-4e^{-x}\right]_{0}^{2}=e^{2}-\frac{4}{e^{2}}+3\ u^{2}$$

Siendo Ln *x* el logaritmo neperiano de *x*, halla el área de la superficie sombreada.



MATEMÁTICAS II. 2004. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$A_1 = \int_1^3 \ln x\,dx = \left[x\ln x - x\right]_1^3 = (3\ln 3 - 3) - (1\ln 1 - 1) = 3\ln 3 - 2$$

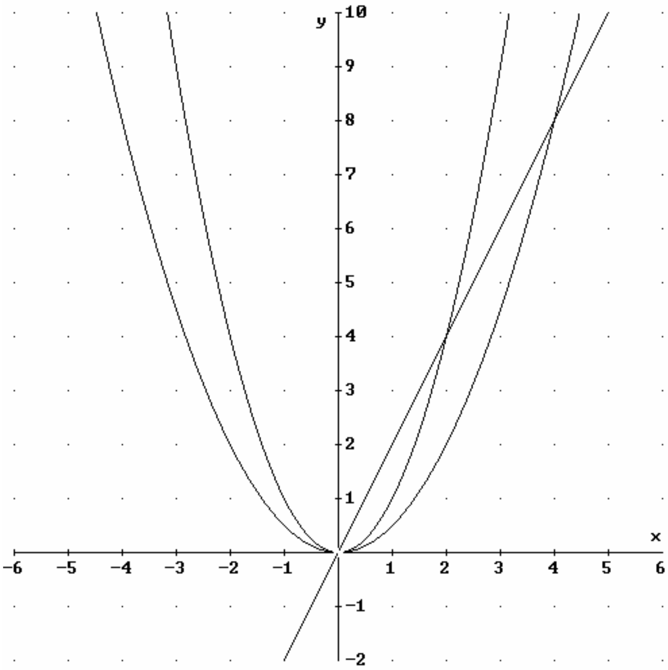
Área del rectángulo = base x altura = $3\ln 3$

Área pedida = Área del rectángulo $-A_1 = 3\ln 3 - (3\ln 3 - 2) = 2\ u^2$

Calcula el área del recinto acotado que está limitado por la recta $y = 2x$ y por las curvas $y = x^2$ e $y = \frac{x^2}{2}$.

MATEMÁTICAS II. 2004. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



$$Área = \int_0^2 \left[x^2 - \frac{x^2}{2} \right] dx + \int_2^4 \left[2x - \frac{x^2}{2} \right] dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{6} \right]_0^2 + \left[x^2 - \frac{x^3}{6} \right]_2^4 =$$

$$= \left[\frac{8}{3} - \frac{8}{6} + 16 - \frac{64}{6} - 4 + \frac{8}{6} \right] = 4\ u^2$$